Matematiikan peruskurssi C3-II/KP3-II Mat-1.1132/1332, kesä 2013

Kari Eloranta

Matematiikan laitos
Aalto yliopisto

August 6, 2013

Yleiset asiat

- Luennot 5 viikkoa, 6t per viikko:
  ke 9:15-11, to 9:15-11, 12:15-14, kaikki G-salissa.
  Kysymykset ja kommentit: `kari.eloranta@aalto.fi`
- Harjoitukset samat 5 viikkoa, 4t per viikko:
  ke 12:15-14 ja pe 9:15-11, molemmat salissa K.
  mikroharjoitus viikolla 35, ke 28.8. 14:15-16, Maari-A.
  Harjoitusasioissa yhteys ensisijaisesti assistenttiin:
  `antti.ranni@aalto.fi` .
- Tentti ti 10.9. klo 16-20. Harjoituskrediitti.
- Aiemmat ja myöhemmät tentit eivät mene kesäkurssin sisällöllä!
- Kurssin tiedoitus, pdf-kalvot etc. vain C3-II -noppasivun kautta. Luennoilla lisäksi hiukan esimerkkejä ja muuta selvennystä, joka ei välttämättä tule nettiin.
- Viikolla 35 saattaa olla tiedotusvaikeuksia.

Kurssin sisältö

1. Matriisilaskennan pikakertaus
2. Erityisiä matriisityyppejä
3. Matriisiteknologiaa
4. Neliömuodot, hajotelmia
5. Matriisieksponentti
6. Diffentiaaliyhtälösysteemit
7. Kvalitatiivista teoriaa, stabiilisuus
8. Epälineaarisuus, linearisointi
9. Laplace-muunnos
10. Laplace-muunnoksen soveltaminen differentiaaliyhtälöihin

Kelpoa lukemista (viitteitä näihin kalvoilla):

- Kreyszig: Advanced engineering math., Wiley. 9 & 10. painokset ok, 8. sisältö ok, numerointi omalla vastuulla.
- Lay: Linear algebra and its applications, 4. painos, Pearson.

Eli siis mitä?

Hyvin monenlaisissa tilanteissa (luonnontieteissä, insinööritieteissä, taloudessa, biologiassa jne) voidaan luontevasti päätyä matemaattiseen malliin, jossa merkitsevien suureiden $x_j, j = 1, \ldots, n$ muutosnopeudet määräytyvät toisistaan jonkin lineaarisen lain kautta. On siis kyse systeemin, jossa on keskinäisiä riippuvuuksia, mallittamisesta. Jatkuva-aikaisena tämä johtaa **differentiaaliyhtälösysteemiin**:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

ja diskreettiaikaisena **differenssiyhtälösysteemiin**:

$$\begin{cases} y_1(i+1) = a_{11}y_1(i) + a_{12}y_2(i) + \cdots + a_{1n}y_n(i) \\ y_2(i+1) = a_{21}y_1(i) + a_{22}y_2(i) + \cdots + a_{2n}y_n(i) \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n(i+1) = a_{n1}y_1(i) + a_{n2}y_2(i) + \cdots + a_{nn}y_n(i) \ . \end{cases}$$

Merkitään $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $y(i) = (y_1(i), \ldots, y_n(i))^T$ ja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Tällöin alkuperäiset systeemit ovat muotoa

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x, \qquad y(i+1) = \mathbf{A}y(i). \tag{$\star$}$$

Esimerkki: Skalaaridifferentiaaliyhtälö $\frac{dx}{dt} = ax$ on helposti ratkaistavissa separoimalla:

$$\int \frac{dx}{x} = \int adt \;\Rightarrow\; \ln x = at + c \;\Rightarrow\; x(t) = Ce^{at}.$$

Miten tehdä jotain samanlaista matriisiyhtälöille ($\star$)?

Tätä varten kurssilla kehitellään vaadittavat **matriisi- ja muunnostekniikat**, sekä käytettään niitä erityyppisten systeemien kvalitatiivisten ominaisuuksien selvittämiseen.